



Táto veta je nepravdivá.

Všetci Krétania sú klamári.

Epimenides z Knózosu (cca 600 p.n.l.)



→ Tr 1,12

Výroková logika

Jednoduchý výrok

Dunaj je rieka.

Zložený výrok

Dunaj je rieka alebo hotel.



Zdroj: Wikipédia

Výroková logika

Prší.

Ak prší, potom je cesta mokrá. **PRÁVDA**

Cesta je **vlhka** ⇒ **TRIE PRÁVDA**

$$\begin{array}{l} p \\ p \Rightarrow q \\ q \\ \text{modus ponens} \end{array}$$



Základné logické princípy

Princíp dvojhodnotovosti (*bivalencie*)

Existujú práve dve pravdivostné hodnoty – pravda a nepravda.

Princíp vylúčenia tretieho (*tertium non datur*)

Pre každý výrok platí, že buď je pravdivý tento výrok, alebo opak tohto výroku.

Princíp vylúčenia sporu

Pre každý výrok platí, že nie je súčasne pravdivý tento výrok aj opak tohto výroku

67 a. V Shakespearovč Benátském kupci vystupuje dívka Porcie, a tá má tri skříňky – zlatou, stříbrnou a olovenou – a v jedné z nich je Porcína podobizna. Kdo se uchází o její ruku, musí určit, v které skříňce podobizna je, a pokud má štěstí (nebo je tak chytrý) a uhodne, smí se s ní oženit. Na víku každé skříňky je nápis, který má nápadníkovi při volbě pomoci.

Dejme tomu, že by si Porcie chtěla vybrat manžela ne podle toho, jak je ctnostný, ale jen podle toho, jak je inteligentní. Dala na skříňky nápisy:

Zlatá	Stříbrná	Olovená
PODOBIZNA JE V TĚTO SKŘÍŇCE	PODOBIZNA NENÍ V TĚTO SKŘÍŇCE	PODOBIZNA NENÍ VE ZLATÉ SKŘÍŇCE



Portia a Shylock
by Thomas Sully
(Wikimedia)

Nápadníkovi prozradila, že z těch tří nápisů je nanejvýš jeden pravdivý. Kterou skříňku měl nápadník vybrat?

PODÁNKA
LOTA

Chcem vedieť viac...

Raymond M. SMULLYAN:

Jak se jmenuje tahle knížka?

What is the Name of this Book? (1981)

Mladá fronta : Praha, 1986.



George Boole

* 2. novembra 1815, Lincoln, Anglicko
† 8. decembra 1864, Ballintemple, Írsko

– logik a matematik, profesor na Queen's College v Írsku
kvaternióny, matematická analýza, logika = základ informatiky



Systém na ohodnotenie pravdivostných hodnôt výrazov zložených z logických spojok AND, OR, NOT a logických premenných nadobúdajúcich iba dve hodnoty – 1 (PRAVDA) a 0 (NEPRAVDA).

The class X and the class not-X together make the Universe. But the Universe is 1, and the class X is determined by the symbol x, therefore the class not-X will be determined by the symbol 1 - x.



Zdroj: Wikipédia

Boolova algebra

B: X ⊆ {0, 1}

Negácia (komplement) je unárna operácia na množine B, ktorú označujeme $\bar{}$ a definujeme:

$$\bar{0} = 1 \text{ a } \bar{1} = 0$$

Logický súčet je binárna operácia na množine B, ktorú označujeme $+$ a definujeme takto:

$$0+0=0, \quad 0+1=1, \quad 1+0=1, \quad 1+1=1. \quad \text{OR}$$

Logický súčin je binárna operácia na množine B, ktorú označujeme \cdot a definujeme takto:

$$0 \cdot 0=0, \quad 0 \cdot 1=0, \quad 1 \cdot 0=0, \quad 1 \cdot 1=1. \quad \text{AND}$$



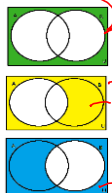
Zdroj: Wikipédia

Pre každé x, y, z ∈ B platí (pozor na preklepy ☹)

$x + y = y + x$	$x \cdot y = y \cdot x$	komutatívne zákony
$(x + y) + z = x + (y + z)$	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$	asociatívne zákony
$(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$	$(x \cdot y) + z = (x + z) \cdot (y + z)$	distributívne zákony
$x + \bar{x} = 1$ $x \cdot \bar{x} = 0$	$\bar{\bar{x}} = x$	de Morganove zákony
$x + x = x$	$x \cdot x = x$	zákony idempotentnosti
$x + \bar{x} = 1$ $x \cdot \bar{x} = 0$	$x \cdot \bar{x} = 0$	zákony komplementárnosti
$\bar{\bar{x}} = x$		zákon involúcie
$x + (x \cdot y) = x$	$x \cdot (x + y) = x$	zákony absorpcie
$x + 0 = x$	$x \cdot 1 = x$	zákony identity
$x + 1 = 1$	$x \cdot 0 = 0$	
Zákon jednotkového sčítovania	Zákon nulového násobenia	

De Morgan

$$\overline{A + B} \equiv \bar{A} \cdot \bar{B},$$



$$\overline{A \cdot B} \equiv \bar{A} + \bar{B}$$

A	B	$\bar{A} \cdot \bar{B}$	$\bar{A} + \bar{B}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0



Augustus De Morgan (1806-1871)

$$\bar{A} + \bar{B} = \overline{A \cdot B}$$

$$\bar{1} + \bar{1} = 0 + 0 = 0$$

Zdroj: Wikipédia

Negácia

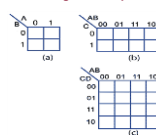
Tabuľka

A	Y
0	1
1	0

Rovnica

$$Y = \bar{A}$$

Karnaughova mapa

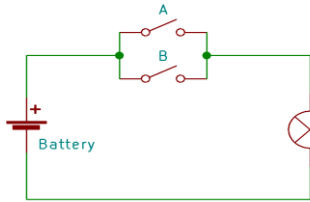


Schematická značka



Logický súčet

OR



A	B	Z
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

Logický súčet

OR

Tabuľka

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Karnaughova mapa



Rovnica

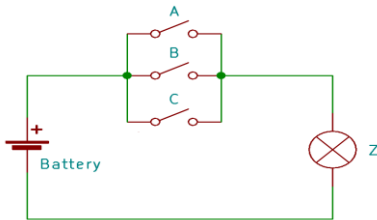
$$Y = A + B$$

Schematická značka



Logický súčet viac premenných

OR



Logický súčet viac premenných

OR

Tabuľka

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Rovnica

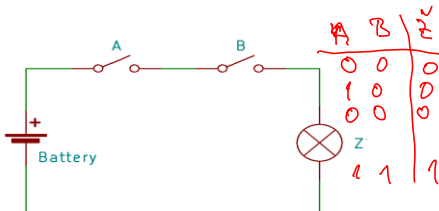
$$Y = A + B + C$$

Schematická značka



Logický súčin

AND



A	B	Z
0	0	0
1	0	0
0	0	0
1	1	1

Logický súčin

AND

Tabuľka

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Rovnica

$$Y = A \cdot B$$

Karnaughova mapa



Schematická značka



Logický súčin viac premenných

AND

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$Y = A \cdot B \cdot C$



Exclusive OR

XOR

Tabuľka

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Rovnica

$Y = A \oplus B$

Karnaughova mapa



Schematická značka



Negovaný logický súčet

NOR

Tabuľka

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

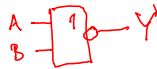
Rovnica

$Y = \overline{A + B}$

Karnaughova mapa



Schematická značka



Negovaný logický súčin

NAND

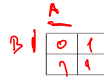
Tabuľka

A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Rovnica

$Y = \overline{A \cdot B}$

Karnaughova mapa

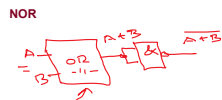
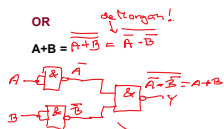
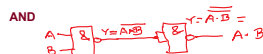
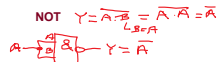


Schematická značka

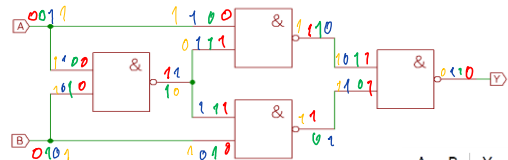


<https://simulator.io/board/CTnCXYisR8/>

NAND – úplný logický systém



NAND – úplný logický systém




Analýza: je to obvod XOR!

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Koľko je logických funkcií jednej premennej?

A	Y ₁	Y ₂	Y ₃	Y ₄	Y ₅	Y ₆
0	1	0	1	0		
1	0	1	1	0		

$Y=1$
 $Y=0$
 $Y=\bar{A}$
 $Y=A$



Koľko je logických funkcií dvoch premenných?

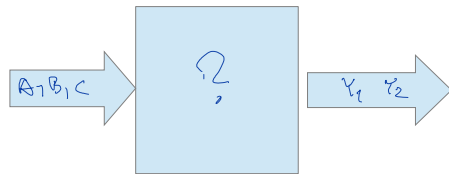
A	B	Y ₁	Y ₂	Y ₃	Y ₄	Y ₅	Y ₆
0	0	0	1				
1	0	0	1				
0	1	0	1				
1	1	0	1				

$Y=0$
 $Y=1$

Koľko je logických funkcií?

A	B	C	Y	Logická funkcia	Symbol
0	0	1	1	A	
0	1	0	1	B	
0	0	0	0	nulová funkcia	$y_1 = 0$
0	0	0	1	logický súčin, konjunkcia	$y_2 = A \cdot B$
0	0	1	0	negácia implikácie, zábrana, inhibícia	$y_3 = \bar{A} \Rightarrow B$
0	0	1	1	premená A	$y_4 = A$
0	1	0	0	negácia obrátenej implikácie	$y_5 = B \Rightarrow A$
0	1	0	1	premená B	$y_6 = B$
0	1	1	0	exkluzívny súčet, nonekvivalencia, XOR	$y_7 = A \oplus B$
0	1	1	1	logický súčet, disjunkcia, OR	$y_8 = A + B$
1	0	0	0	negovaný logický súčet, Pierceova funkcia NOR	$y_9 = \overline{A + B}$
1	0	0	1	zhoda, ekvivalencia	$y_{10} = A \equiv B$
1	0	1	0	negácia B	$y_{11} = \bar{B}$
1	0	1	1	obrátená implikácia	$y_{12} = B \Rightarrow A$
1	1	0	0	negácia A	$y_{13} = \bar{A}$
1	1	0	1	implikácia	$y_{14} = A \Rightarrow B$
1	1	1	0	negovaný logický súčin, Shefferova funkcia NAND	$y_{15} = \overline{A \cdot B}$
1	1	1	1	jednotková funkcia	$y_{16} = 1$

Syntéza logických obvodov



Syntéza logických obvodov

A	B	C	Y
0	0	0	1
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

$Y = A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$

UNDEF: úplná normálna disjunktívna forma - súčet súčinov
 UNKNE: úplná normálna konjunktívna forma - súčin súčtov

$Y = (A+B+C) \cdot (A+\bar{B}+\bar{C}) \cdot (\bar{A}+B+C) \cdot (\bar{A}+\bar{B}+C) \cdot (\bar{A}+B+\bar{C})$

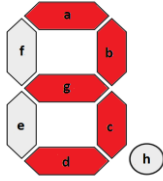
Syntéza logických obvodov

A	B	C	Y
0	0	0	1
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

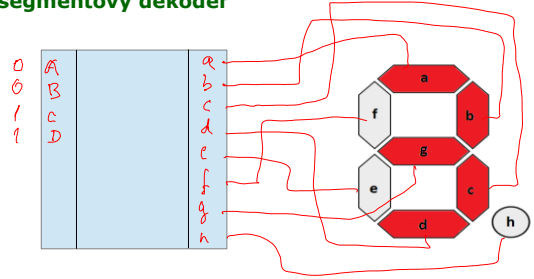
$Y = A \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$

Schéma zapojenia:

7-segmentový dekódér

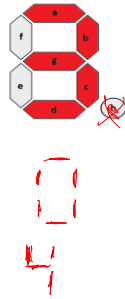


7-segmentový dekódér



7-segmentový dekódér

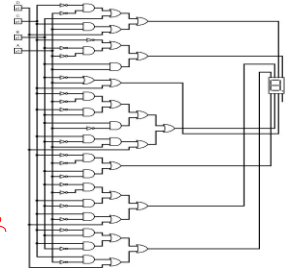
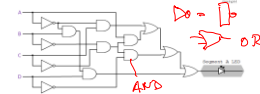
	A	B	C	D	a	b	c	d	e	f	g
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1							
2	0	0	1	0							
3	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1
4	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
5	0	1	0	1							
6	0	1	1	0							
7	0	1	1	1							
8	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
9	1	0	0	1							



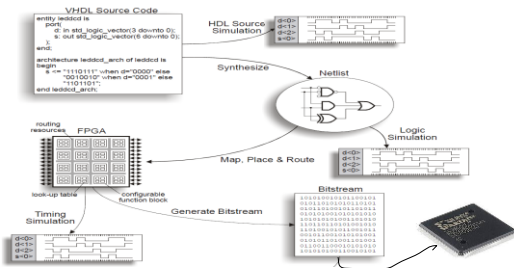
7-segmentový dekódér

Binary Input	Decoder Outputs	7-segment Display Pattern
0 0 0 0	a b c d e f g	0
0 0 0 1		1
0 0 1 0		2
0 0 1 1		3
0 1 0 0		4
0 1 0 1		5
0 1 1 0		6
0 1 1 1		7
1 0 0 0		8
1 0 0 1		9

$a = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D}$



Syntéza FPGA (Xilinx)

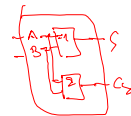


Sčítačka



$S = A \oplus B$

$C_g = A \cdot B$



A	B	S	Cg
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Úplná sčítačka

$$S = \bar{C}_1 \cdot \bar{A} \cdot B + \bar{C}_1 \cdot A \cdot \bar{B} + C_1 \cdot \bar{A} \cdot \bar{B} + C_1 \cdot A \cdot B$$

$$C_2 = \bar{C}_1 \cdot A \cdot B + C_1 \cdot \bar{A} \cdot B + C_1 \cdot A \cdot \bar{B} + C_1 \cdot A \cdot B$$

C ₁	A	B	S	C ₂
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Programovateľný AND/OR člen

$$f = \begin{cases} 0: Y = A + B \\ 1: Y = A \cdot B \end{cases}$$

f	A	B	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$$Y = \underbrace{\bar{f}}_1 \cdot \bar{A} \cdot B + \underbrace{f}_2 \cdot A \cdot \bar{B} + \underbrace{f}_3 \cdot A \cdot B = \bar{f} \cdot (\bar{A}B + A\bar{B}) + f \cdot A \cdot B = \bar{f}(A+B) + f \cdot A \cdot B$$

Programovateľný AND/OR člen

Schéma zapojenia:

f	A	B	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$$Y = \bar{f} \cdot (A+B) + f \cdot A \cdot B$$